Rutheford 散乱

双曲線軌道

ラザフォード散乱をする粒子の軌道は双曲線となることが知られている。つぎの軌道の方程式を極座標であらわせ。

$$\frac{(x-c)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

漸近線の傾きは b/a で b はインパクトパラメータ、点 $(c, 0)$ は焦点をあらわす。また $b^2 = c^2 - a^2$ となる。上の式に $x = r\cos\theta$、$y = r\sin\theta$ を代入すると、以下のふたつの軌道の式が導かれることを示せ。

$$r = \frac{c^2 - a^2}{a + c\cos\theta} \quad , \quad r = \frac{c^2 - a^2}{-a + c\cos\theta}$$

運動方程式と楕円、双曲線軌道

運動方程式を極座標を使ってあらわすとつぎのふたつの式が得られる。ここで M は非常におおきく重力が働いて質量 m を引っ張っているものとしている。

$$m\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{L^2}{mr^3} = -\frac{GMm}{r^2}$$

$$L = r^2 m\frac{d\theta}{dr} = \text{一定}$$

ここで L は角運動量である。この方程式の解が楕円又は双曲線となることを示せ。ヒントとしては以下の関係がなりたつことを使う。

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{d}{d\theta} = \frac{L}{mr^2}\frac{d}{d\theta}$$

またこの後、$u = 1/r$ と変換すると以下の式となることを使う。

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{m^2GM}{L^2}$$

この結果以下の式がなりたつことをしめす。ただし α、C は積分定数。

$$r = \frac{l}{1 + e\cos(\theta + \alpha)} \quad \left(l = \frac{L^2}{m^2GM}, e = \frac{L^2C}{m^2GM}\right)$$