光の回折

(a) 次の式を導け。

$$E = A(\theta)\{\sin\omega t + \sin(\omega t+\phi) + \cdots + \sin(\omega t + (N-1)\phi)\}$$
$$= A(\theta)\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\sin\left(\omega t + \frac{(N-1)\phi}{2}\right)$$

解答例

$$\mathrm{Re}\frac{z_2}{z_1} = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_1^2+y_1^2}, \mathrm{Im}\frac{z_2}{z_1} = \frac{x_1y_2-y_1x_2}{x_1^2+y_1^2}$$

$$\mathrm{Im}z_1z_2 = \mathrm{Re}z_1\mathrm{Im}z_2 + \mathrm{Im}z_1\mathrm{Re}z_2$$

以上の式を使うと以下のように計算できる。

$$\begin{aligned}
\frac{E}{A(\theta)} &= \mathrm{Im}\{e^{i\omega t}(1+e^{i\phi}+\cdots+e^{i(N-1)\phi})\} = \mathrm{Im}e^{i\omega t}\frac{1-e^{iN\phi}}{1-e^{i\phi}} \\
&= \cos\omega t\frac{-(1-\cos\phi)\sin N\phi + \sin\phi(1-\cos N\phi)}{4\sin^2\frac{\phi}{2}} + \sin\omega t\frac{(1-\cos\phi)(1-\cos N\phi)+\sin\phi\sin N\phi}{4\sin^2\frac{\phi}{2}} \\
&= \cos\omega t\frac{\sin\phi - \sin N\phi + \sin(N-1)\phi}{4\sin^2\frac{\phi}{2}} + \sin\omega t\frac{1-\cos\phi-\cos N\phi+\cos(N-1)\phi}{4\sin^2\frac{\phi}{2}} \\
&= \frac{\sin(\omega t+(N-1)\phi) + \sin\omega t - \sin(\omega t + N\phi) - \sin(\omega t - \phi)}{4\sin^2\frac{\phi}{2}} \\
&= \frac{2\sin\left(\omega t + \frac{(N-1)\phi}{2}\right)\cos\frac{(N-1)\phi}{2} - 2\sin\left(\omega t+\frac{(N-1)\phi}{2}\right)\cos\frac{(N+1)\phi}{2}}{4\sin^2\frac{\phi}{2}} \\
&= \frac{\sin\left(\omega t+\frac{(N-1)\phi}{2}\right)\sin\frac{N\phi}{2}}{\sin\frac{\phi}{2}}
\end{aligned}$$

インピーダンス

電圧が $V = V_0\cos\omega t$ であたえられる RLC 直列回路の回路方程式を一度時間で微分して $dQ/dt = I$ であることを使うと以下のようになる。

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = -V_0\omega\sin\omega t$$

電流の位相の進む角度を ϕ とし、$I = I_0\cos(\omega t - \phi)$ を代入すると以下のようになる。

$$I_0(L\omega - 1/C\omega)\cos(\omega t-\phi) + I_0R\sin(\omega t - \phi) = V_0\sin\omega t$$

ここで $\omega t' = \omega t - \phi$ とし $Z = \sqrt{R^2+(L\omega-1/C\omega)^2}$、さらに ϕ を図のようにとれば、もとめる回路方程式が成り立つことが分かる。